理工学域 数物科学類 計算科学コース
編入学試験　参考問題

過去問題に代るものとして受験生の方々の参考に供するものです

金沢大学 理工学域 数物科学類 計算科学コース

微分積分

$\boxed{\mathbf{1}}$　次のことを示せ。

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする。$f(x)$ は連続でない。

(2) $f(x) = \begin{cases} x^{m} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする。$m \geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である。

$\boxed{\mathbf{2}}$　n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める。

$$I_n = \int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

このとき次の問に答えよ。

(1)　I_1 の値を求めよ。

(2)　$n \geq 2$ のとき、次の漸化式が成り立つことを示せ。

$$I_n = \frac{1}{e} + (n-1)\, I_{n-1}$$

(3)　次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

$$I_n = \frac{(n-1)!}{e} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

(4)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$　何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が

$$\Delta u = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

をみたしているとする。このとき，

$$v = x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} + z\,\frac{\partial u}{\partial z}$$

に対して，Δv を計算せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) 自然数 n に対して, 集合 $D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le n^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

を求めよ。

(2) 集合 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le n\}$ を R_n と表すとき,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \right) = 0$$

を示せ。

(3) 次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$　変数 x, y が集合

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le x+y\}$$

を動くとき，関数

$$f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$$

の最大値を求めよ (その値が最大値となることの証明をつけること)。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $x > 0$ の範囲で考えて，

$$f(x) = x^2 \log x$$

と置く。次の小問に答えよ。

(1) $f(x)$ のグラフの概形を書け。また $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対して $f(x)$ の n 次導関数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 函数 $y = \sin^{-1} x, \quad x \in [-1, 1]$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) $y = \sin^{-1} x$ の導函数を求めよ。

(2) $y = \sin^{-1} x$ のグラフの概形を書け。

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の問いに答えよ。ただし，以降 a, b は正の定数とする。

(1) $f(x) = a^x$ の導函数を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, $(n \geq 2)$ を示せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \, dx$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^5 x \, dx$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$　x は $0 < x < 1$ を満たす実数とし，n は $n > 2$ を満たす整数とする。

(1) $f(x) = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ。ここで，$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である。

(2) $\sqrt{1 - x^2} < \sqrt{1 - x^n} < 1$ を示せ。

(3) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^n}} dx < \frac{\pi}{6}$ を示せ。

$\boxed{\mathbf{11}}$　a, b, c は正の定数とし，x, y は次で定義される $\mathbf{R}^2$ の領域 D の点とする。

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2\}.$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ と変数変換を行う。この時，関数行列式 (ヤコビアン) $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|$ を求めよ。

(2) (1) の変数変換を用いて重積分

$$\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$$

を求めよ。

$\boxed{\mathbf{12}}$　重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{y}\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 6,\ 0 < y \leq x \leq 4y\}$$

を考える。次の各小問に答えよ。

(1) 変数 u, v を用いて，変数変換 $x = uv$, $y = u/v$ を行なう。このときのヤコビアンを求めよ。

(2) (1) の変数変換を用いて I の値を求めよ。

線形代数

$\boxed{\mathbf{1}}$　連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

を満たす点 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ の全体を V とする。

(1) V は $\mathbf{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ。

(2) V の基底を一つ求めよ。

(3) $\mathbf{R}^4$ の 基底で，(2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$　次の 4×4 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^4$ について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ。

(2) (1) で求めた a に対して，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ。

(3) 像空間 $\mathrm{Im}\, A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の基底と次元を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$　$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$　実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し，線形写像 $F : M \to M$ を，

$$F(X) = AX - XA \quad (X \in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}\, F = \{X \in M \mid F(X) = O\}, \quad \mathrm{Im}\, F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$　写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

によって定める。

(1) f は線形写像であることを示せ。

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ。ただし，

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3\}, \\ \mathrm{Ker}\, f &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}, \end{aligned}$$

である。

(3) 写像 f は逆写像 f^{-1} を持つか。持つならばそれを求め，持たなければその理由を記せ。

$\boxed{\mathbf{6}}$　$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(2) A の固有値とその固有値に属する固有空間を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\mathbf{R}^3$ の２つの部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; 2x + y + z = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x - 2y + z = 0 \right\}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $V \cap W$ の基底を求めよ。

(2) V と W の基底を求めよ。

(3) $V + W$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ の階数 $(\operatorname{rank} M)$ を求めよ。

(2) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= 5 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(2) 次の n 次正方行列 (対角成分は 0，対角成分以外は 1) の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で，(x, y) 平面に図示せよ。

(1) $(*)$ の左辺は，2×2 の対称行列 A を用いて $(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る。A を求めよ。

(2) A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \binom{a}{b}$（λ_1 に対応），$v_2 = \binom{c}{d}$（λ_2 に対応）を求めよ。ただし $a > 0$，$c > 0$ と選ぶ。

(3) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく。$P^{-1}AP$ を計算せよ。

(4) 変数変換 $\binom{x}{y} = P\binom{X}{Y}$ としたとき，(x, y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X, Y) 平面上の図形に移る。q を求めよ。また，上記の図形を (X, Y) 平面上で図示せよ。

(5) $(*)$ を (x, y) 平面上で図示せよ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ n 次正方行列 A, B に対して，$[A, B] = AB - BA$ と定める。

(1) 任意の A に対して，$[A, X] = 0$ を満たす X を求めなさい。

(2) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ を示しなさい。

$\boxed{\mathbf{12}}$

(1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\mathbf{R}^3$ の標準的な基底とし，$\mathbf{R}^3$ の線形写像 f を次で定義する。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

このとき，標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する f の表現行列を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^3$ の部分空間 V を $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ で定義する。V の基底を求めよ。

$\boxed{\textbf{13}}$

行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える。次の各小問に答えよ。

(1) P の固有値をすべて求めよ。またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ。ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ。

(2) v を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ。

(3) $P^n v$ を求めよ。さらに極限 $\lim_{n\to\infty} P^{2n+1}v$ と $\lim_{n\to\infty} P^{2n}v$ を求めよ。

力学

$\boxed{\mathbf{1}}$ 質量が無視できる自然長 L_0，バネ定数が k のバネ，および大きさの無視できる質量 m の物体がある。図のようにこのバネを地面に鉛直に立てておく．このバネの真上，地上から高さ h $(h > L_0)$ の位置から質量 m の物体を静かに放す．ただし，重力加速度を g とする．

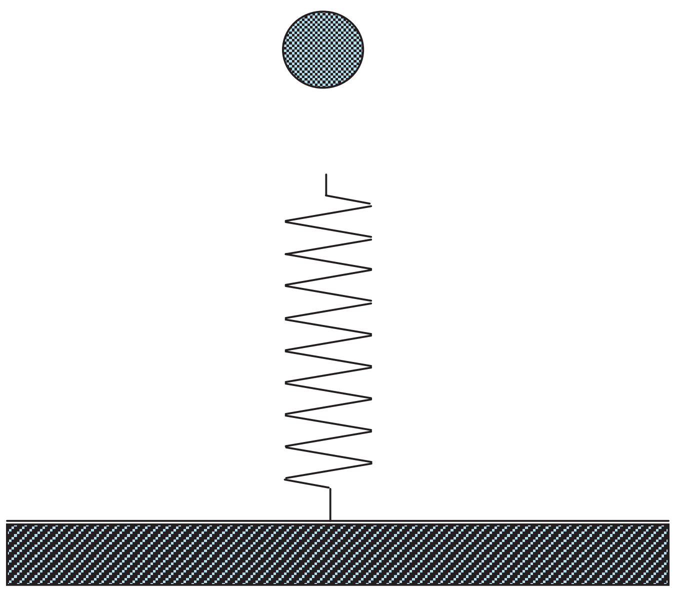
(1) この物体がバネに接する前における運動方程式を書け．

(2) この物体がバネに接する直前の物体の速さを求めよ．

(3) この物体がバネにぶつかり更に下方に運動している時の最大の速さを求めよ．

(4) 物体がその最大の速さをもつときの物体の位置は地面からどれだけの距離にあるか．

(5) バネが最も縮んだときのバネの長さを求めよ．



$\boxed{\mathbf{2}}$ 図のように傾き θ の斜面の最大傾斜線に沿って，滑ることなく転がり落ちていく密度が一様な円盤 (質量 M，半径 a) の運動を考える．斜面に沿って下向きに x 軸をとり，時刻 t での中心の位置を $x(t)$ とする．また，円盤が回転した角度を $\phi(t)$ とする．ただし，$x(0) = \phi(0) = 0$ である．重力加速度の大きさを g，摩擦力の大きさを F として以下の問に答えよ．

(1) x についての運動方程式を書け．

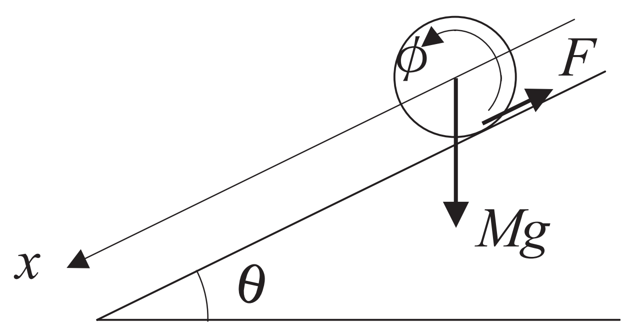
(2) 円盤の慣性モーメントを I として，ϕ についての運動方程式を書け．

(3) 円盤は斜面を滑らないという条件を，x, ϕ, a を使って表せ．

(4) 「原点から距離 r の位置にある質量 m の質点の，原点周りの慣性モーメントは mr^2 である」ことを使って，$I = \dfrac{1}{2}Ma^2$ であることを示せ．

(5) F を M, g, θ を使って表せ．

(6) 最大静止摩擦係数を μ として，円盤が斜面を滑らないために θ が満たすべき条件を求めよ．



電磁気学

1 真空中で，半径 $a, b (b > a)$ の中心を同じくする金属球殻を考える．球殻の厚みは無視する．半径 a の球殻に電荷 Q, b の球殻に電荷 $-Q$ を与える．

(1) この時の電場を求めよ．

(2) 無限遠点の電位を 0 として，中心からの動径方向の電位分布を求めよ．横軸に動径方向の距離，縦軸に電位をとり図示せよ．

(3) この二つの球殻をコンデンサーと考えた場合の電気容量を求めよ．

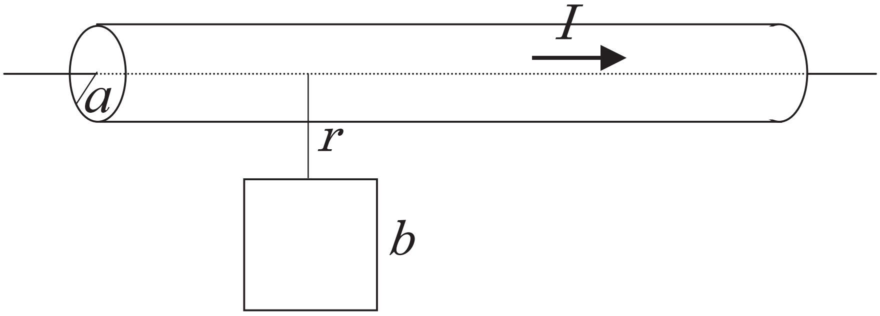
$\boxed{\mathbf{2}}$ 真空中で，半径 a の円形断面をした直線状導線を考える．この導線に，時間的に変化しない電流 I が軸方向に流れている．電流は断面積内に一様に分布している．導線の長さは十分に長く，無限とみなしてよい．

(1) この時できる磁場を図示せよ．

(2) 磁場の大きさを，導線の内外について求めよ．横軸に導線の中心軸からの距離，縦軸に磁場の大きさにとりグラフを書け．

(3) 導線の中心軸を含む平面内に一辺が b で導線と平行な正方形をとる．図のように直線からの距離は $r(r > a)$ とする．この正方形を横切る磁束を求めよ．

(4) 上の問題と同じ状況で，導線に流れる電流が $I = I_0 \sin wt, (w, I_0$ は定数$)$ で時間的に変化している場合，正方形の外周に沿った線状回路一周あたりに生じる誘導起電力を求めよ．



直線状導線と正方形．導線は絵に描かれているよりずっと長い物を考える．

プログラミング

1 フィボナッチ数列

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 1) \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

を考える．0 以上の整数 n を入力から受け取り，a_n を出力するプログラムを書け．ただし，配列は使ってはいけない．

2 $X = \{x_j\}_{j=1,\cdots,N}$ と $Y = \{y_j\}_{j=1,\cdots,N}$ を，それぞれ N 個の実数値の集まりとする．それぞれの平均値を $\overline{X}$ と $\overline{Y}$ と書くとき，X と Y の相関関数 $\langle X, Y \rangle$ は

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - \overline{X} \right) \left(y_j - \overline{Y} \right)$$

で定義される．

N 個の実数値からなるデータが二組与えられたとき，その二組のデータの相関関数を計算する C プログラムまたは FORTRAN プログラムを書け．数値データは与えられているとして，代入文などでプログラム中に埋め込んでも構わない．